РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ
ЗАДАНИЙ I МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА
Творческого конкурса учителей математики
общеобразовательных организаций Республики Адыгея
2018 год

21 апреля 2018 года

Максимальный балл по каждой задаче - 7

1. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

Решение.

В прямоугольном треугольнике $R = \frac{a+b-c}{2}$.

У данного квадратного уравнения дискриминант равен 28, следовательно, оно имеет ровно два различных корня. Поскольку $x_1 + x_2 = 3, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$, оба корня уравнения положительны и задача имеет смысл.

По теореме Виета из данного уравнения найдем сумму катетов и гипотенузу.

Сумма катетов равна $x_1 + x_2 = 3$. Гипотенуза c данного прямоугольного треугольника находится по теореме Пифагора:

$$c = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{3^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Тогда искомый радиус равен $R = \sqrt{2}$. Площадь описанной окружности равна 2π.

Ответ. 2π.

Критерий:

Отсутствие обоснования наличия корней (нет проверки условия $D > 0$) – не более 3 баллов.

Отсутствие обоснования положительности корней – не более 4 баллов.

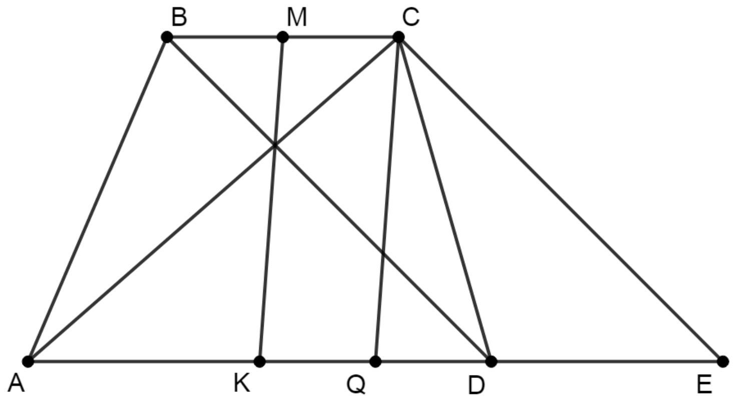
Ход решения верен, допущена арифметическая ошибка – снимается 1 балл.

Задача может быть решена с применением формулы корней квадратного уравнения в явном виде, за это баллы не снимаются.

2. В трапеции $ABCD$ отрезок, соединяющий середины оснований AD и BC, равен 5,5. Найдите площадь трапеции, если её диагонали перпендикулярны и одна из них равна 7.

Решение.

Пусть M и K – середины оснований BC и AD трапеции $ABCD, BD = 7$.



Через вершину C меньшего основания BC проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке E и прямую, параллельную MK, до пересечения с прямой AD в точке Q.

Тогда $AQ = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}AE$, то есть CQ – медиана треугольника ACE.

Так как $AC \perp CE$, то $AQ = QE = CQ = 5{,}5$.

Поэтому $AE = 11$, $AC^2 = AE^2 – CE^2 = 72$. Следовательно, $S_{ABCD} = S_{ACE} = \frac{1}{2}AC \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 7 = 21\sqrt{2}$.

Ответ. $21\sqrt{2}$.

Критерий:

Ход решения верен, допущена арифметическая ошибка – снимается 2 балла.

3.

а) Решите уравнение $\frac{\cos 2\pi x}{1 + \operatorname{tg} \pi x} = 0$.

б) Найдите корень, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.

Решение.

а) $\frac{\cos 2\pi x}{1+\operatorname{tg}\pi x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2\pi x=0,\\ 1+\operatorname{tg}\pi x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z},\\ \pi x\neq -\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z},\\ \cos\pi x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=\frac{1}{4}+\frac{n}{2}, n\in\mathbb{Z},\\ x\neq -\frac{1}{4}+k, k\in\mathbb{Z},\\ x\neq\frac{1}{2}+l, l\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}+\frac{n}{2}, n \vdots 2$ или $x=\frac{1}{4}+m, m\in\mathbb{Z}$.

Обоснуем последний равносильный переход:

$$\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\neq -\frac{1}{4}+k \Leftrightarrow \frac{n}{2}\neq -\frac{1}{2}+k \Leftrightarrow n\neq -1+2k.$$

Итак, число n не должно быть представимо в виде $n=2k-1$, то есть оно должно быть четным.

Тогда корни уравнения имеют следующий вид: $x=\frac{1}{4}+\frac{n}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2m}{2}=\frac{1}{4}+m, m\in\mathbb{Z}$.

Заметим, что найденные корни удовлетворяют третьему условию системы.

б) Заметим, $3<\sqrt{13}<4$, значит подходящий корень нужно искать среди чисел $2\frac{1}{4}, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{4}$.

Поскольку $\sqrt{13}>3\frac{1}{4}$, число $2\frac{1}{4}$ рассматривать не нужно.

Теперь сравним разности

$\sqrt{13}-\frac{13}{4}$ и $\frac{17}{4}-\sqrt{13}$ или $2\sqrt{13}$ и $\frac{30}{4}$ или $\sqrt{13}$ и $\frac{15}{4}$ или 208 и 225.

Итак, $\sqrt{13}-\frac{13}{4}<\frac{17}{4}-\sqrt{13}$, а значит ближайшим является число $3\frac{1}{4}$.

Ответ. а) $\frac{1}{4}+m, m\in\mathbb{Z}$; б) $3\frac{1}{4}$.

Критерий:

Данная задача оценивается по двум пунктам отдельно. Баллы, полученные за пункт а) и пункт б), суммируются.

Оценивание пункта а):

Не упомянута ОДЗ – 1 балл.

ОДЗ упомянута, но не учтена – 2 балла.

Верное решение пункта а) – 4 балла.

Оценивание пункта б):

Ход решения верен, допущена арифметическая ошибка в пункте б) – 2 балла.

В пункте а) не учтена/не упомянута ОДЗ, но имеется верная последовательность шагов в решении пункта б) – 1 балл.

Недостаточность обоснования минимального расстояния – снимается 1 балл.

Верное решение пункта б) – 3 балла.

4. За круглым столом сидят гномы. Гномы по кругу передают горшок с золотыми монетами. Первый гном взял из горшка 1 монету, второй — 2, третий — 3 и так далее. Каждый следующий брал ровно на одну монету больше. Оказалось, что на четвертом круге гномы суммарно взяли на 675 монет больше, чем на первом. Сколько гномов могло сидеть за столом?

Решение.

Пусть за столом n гномов.

Тогда за первый круг они возьмут 1, 2 … n монет.

На четвертом круге каждый гном возьмет на $3n$ монет больше, чем он брал в первый раз. Значит сумма за четвертый круг больше суммы за первый круг на $3n^2$ монет больше.

Составим и решим уравнение исходя из того, что $n > 0$:

$$3n^2 = 675 \Leftrightarrow n^2 = 225 \Leftrightarrow n = 15.$$

Ответ. 15.

Критерий:

Ход решения верен, допущена арифметическая ошибка – 5 баллов.

5. *В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.*

«Условие». Решите неравенство $\log_5(2+x)(x-5) < \log_{25}(x-5)^2$.

«Решение».

$$\log_5(2+x)(x-5) < \log_{25}(x-5)^2\,;$$

$$\log_5(2+x)+\log_5(x-5)<\log_5(x-5);$$

$$\log_5(2+x)<0;$$

$$2+x<1;$$

$$x<1.$$

«Ответ»: $(-\infty;1)$.

Решение.

В приведенном «Решении» не учтена ОДЗ, а также совершены неравносильные переходы от $\log_{25}(x-5)^2$ к $\log_5(x-5)$ и от $\log_5(2+x)(x-5)$ к $\log_5(2+x)+\log_5(x-5)$.

Приведем верное решение.

Заметим, что указанное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}\log_5|2+x|+\log_5|x-5|<\log_5|x-5|,\\ x\in(-\infty;-2)\cup(5;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5|2+x|<0,\\ x\in(-\infty;-2)\cup(5;+\infty)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<|2+x|<1,\\ x\in(-\infty;-2)\cup(5;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-3;-2)\cup(-2;-1),\\ x\in(-\infty;-2)\cup(5;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$x\in(-3;-2)$.

Ответ. $x\in(-3;-2)$.

Критерий:

Данная задача оценивается по двум пунктам: указание на ошибки в приведенном решении и правильное решение исходного неравенства. Баллы, полученные за оба пункта, суммируются.

Оценивание приведенного решения:

Указано только на отсутствие учета ОДЗ – 1 балл.

Указано только на неравносильность переходов – 2 балла.

Все ошибки указаны верно – 3 балла.

Оценивание решения, написанного участником:

Ход решения верен, допущена арифметическая ошибка – 3 балла.

Приведено верное решение – 4 балла.

Примечание ко всем задачам:

Приведенные решения не являются единственно возможными. Правильное решение, отличное от указанного, оценивается полным баллом.